

أولاً: حل التمارين الأربعة الآتية: (٤٠ درجة لكل تمرين)

١. اكتب معادلة لكرة مركزها $A(3, -4, 2)$ و تمر من النقطة $B(-1, -4, -1)$.
٢. أوجد مجموعة حلول المتراجحة $\ln(x^2 - 3x) \geq 2 \ln(6 - x)$.
٣. عيّن قيمة m ليكون التابع f مستمراً على \mathbb{R} حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 \sin \frac{1}{x} & : x \neq 0 \\ m + 1 & : x = 0 \end{cases}$$

٤. إذا كان $Z_1 = 2 - 2i$, $Z_2 = -i$ عددين عقديين، فاكتب $(Z_2)^5$ بالشكل الأسّي، واكتب $(Z_1)^4$ بالشكل المثلثي.

ثانياً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (٦٠ درجة لكل سؤال)

١. ليكن التابع $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{4x}}{x-1}$ أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم بالاعتماد على تعريف العدد المشتق أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{4}$

٢. في المعلم المتجانس $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2, 0, 1), B(1, -2, 1), C(5, 5, 0), D(-3, -5, 6)$

أثبت أن هذه النقط تقع في مستو واحد، ثم أوجد إحداثيات النقطة H نظيرة A بالنسبة للنقطة B

٣. أثبت أن للمعادلة $x^3 - 3x + 5 = 0$ حل وحيد في \mathbb{R} ، ثم بيّن أن هذا الحل ينتمي إلى المجال $]-3, -2[$

٤. إذا كان C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}^* وفق: $f(x) = \frac{x^2 - 3 + 2 \cos x}{x}$

فأثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب للخط C عند $(+\infty)$ و ادرس وضع C بالنسبة لـ (Δ)

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (١٠٠ درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: لتكن النقط A و B و C تمثل بالترتيب الأعداد العقدية الآتية:

$$a = 8, b = -4 + 4i, c = -4i$$

١. أثبت أن المثلث ABC قائم في C و متساوي الساقين.
٢. أوجد العدد العقدي d الذي تمثله النقطة D التي تجعل $ACBD$ مربعاً.
٣. أوجد العدد العقدي m الذي تمثله النقطة M بحيث تكون B مركز ثقل المثلث AMC .

المسألة الثانية: بفرض C الخط البياني لتابع f معرف على $]-\infty, -1[$ وفق: $f(x) = x - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

١. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.
٢. أثبت أن المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C ، وبيّن وضع C بالنسبة لـ (Δ)
٣. إذا علمت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد، أثبت أنه يقع في المجال $]-2, -1[$.
٤. ارسم (Δ) ثم ارسم C .